中學生通訊解題第五十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5101

某個將軍有 1000 個武士，任何兩名武士或者互為朋友、或者互為敵人、或者互不相識，而且武士之間只和朋友說話。已知：對於每個武士而言，他的任何兩個朋友都互為敵人，而他的任何兩個敵人都互為朋友。若將軍要使所有武士都知道一項新命令，則將軍至少要通知多少名武士？

參考解答：

200 名。

由條件可知：任何一名武士的朋友都不超過 2 人。若將武士們按照朋友關係形成若干條鏈：第一個人與第二個人是朋友，第二個人與第三個人是朋友，依此類推。則每個朋友鏈的長度至多是 5。所以，至少要通知 200 名武士。

解題評註：

本題解題需證明兩件事：

(1) 每人最多只有兩位朋友

(2) 每通知一武士，最多可讓 5 名武士知道。

討論過程中可利用圖來協助：點代表人，點與點的連線表示人與人之間的關係；如此說明起來較容易看懂，也不容易出錯。

問題編號
5102

求最小的自然數 $n(>1)$，使存在整數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$，滿足

$a_1a_2\ldots a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=2006$

參考解答：

1. $\because$ 2006 為 2 的倍數但不為 4 的倍數

   $\therefore$ $a_1a_2\ldots a_n=2006$ 可得 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 有且只有一個偶數

   又由 $a_1+a_2+\ldots+a_n=2006$ 可得 n 為奇數且 $n\geq3$

2. (1) 若 $n=3$ 時，明顯可證不存在合要求的整數 a_1,a_2,a_3

   即 $2006=1\times1\times2006=1\times2\times1003=2\times17\times59$

   代入三正及兩負一正等情形皆不合要求

   (2) 若 $n=5$ 時，令 $a_1=2006,a_2,=a_3=1,a_4,=a_5=-1$，即可得合要求的解

   故 n 的最小的自然數為 5

解題重點：

1. 利用 2006 為 2 的倍數但不為 4 的倍

數，得合條件的 n 必爲奇數且 $n \geq 3$。

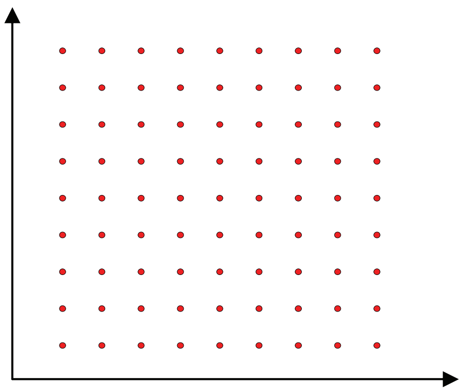
2. 再說明 $n=3$ 無解，$n=5$ 時有解，故得 n 最小值爲 5。
3. 本題可培養學生對數字的敏銳度。

解題評註：

本題參與徵答人數共計 12 位，其中答錯的同學皆是因造解過程將 2006 因數分解爲 2006=2×1003 或 2×17×59 等分解方式，並將其餘項補乘 1 至其所有項和爲 2006，即 $2006=2\times1003\times\underbrace{1\times1\times1\times\ldots\times1}_{1001\text{ 個}1}$ 或 $2\times17\times59\times\underbrace{1\times1\times1\times\ldots\times1}_{1928\text{ 個}1}$ 等，雖此種方式可造出滿足方程式 $a_1a_2\ldots a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=2006$ 的解，但項數 n 則因分解 2006 而很大。其共同盲點在沒想到要 n 的最小值，就要在不因數分解 2006 的情形下補乘兩個±1。

問題編號
5103

如圖，坐標平面上，點 $P(x,y)$ 爲格子點(x,y 皆爲整數的點)，若 $1\le x\le 9, 1\le y\le 9$，試問任意兩個滿足條件的點相連，共可產生幾條相異的直線？



參考解答：

依照斜率分別計算直線數

項目	斜率	相異直線數	項目	斜率	相異直線數
1	0	9 條	13	$\pm\frac{5}{4},\pm\frac{4}{5}$	20×2×2=80 條
2	不存在	9 條	14	$\pm\frac{6}{5},\pm\frac{5}{6}$	12×2×2=48 條

3	$\pm\frac{1}{1}$	15×2=30 條	15	$\pm\frac{7}{1},\pm\frac{1}{7}$	16×2×2=64 條
4	$\pm\frac{2}{1},\pm\frac{1}{2}$	21×2×2=84 條	16	$\pm\frac{7}{2},\pm\frac{2}{7}$	14×2×2=56 條
5	$\pm\frac{3}{1},\pm\frac{1}{3}$	27×2×2=108 條	17	$\pm\frac{7}{3},\pm\frac{3}{7}$	12×2×2=48 條
6	$\pm\frac{3}{2},\pm\frac{2}{3}$	27×2×2=108 條	18	$\pm\frac{7}{4},\pm\frac{4}{7}$	10×2×2=40 條
7	$\pm\frac{4}{1},\pm\frac{1}{4}$	33×2×2=132 條	19	$\pm\frac{7}{5},\pm\frac{5}{7}$	8×2×2=32 條
8	$\pm\frac{4}{3},\pm\frac{3}{4}$	27×2×2=108 條	20	$\pm\frac{7}{6},\pm\frac{6}{7}$	6×2×2=24 條
9	$\pm\frac{5}{1},\pm\frac{1}{5}$	32×2×2=128 條	21	$\pm\frac{8}{1},\pm\frac{1}{8}$	8×2×2=32 條
10	$\pm\frac{5}{2},\pm\frac{2}{5}$	28×2×2=112 條	22	$\pm\frac{8}{3},\pm\frac{3}{8}$	6×2×2=24 條
11	$\pm\frac{5}{3},\pm\frac{3}{5}$	24×2×2=96 條	23	$\pm\frac{8}{5},\pm\frac{5}{8}$	4×2×2=16 條
12	$\pm\frac{6}{1},\pm\frac{1}{6}$	24×2×2=96 條	24	$\pm\frac{8}{7},\pm\frac{7}{8}$	2×2×2=8 條

共計有 1492 條相異直線

解題評註：

本題同學們有些未注意到並非計算產生多少條線段，而是計算產生多少條相異的直線，相同直線的情形不能重複計算，實爲可惜。其餘同學大都以計算不同斜率來求相異直線數，但因很容易計算疏失，要正確確實不易。

問題編號
5104

設 n 是整數，且 $n \ge 2$ 。 試求

$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7+3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+5\cdot 7\cdot 9\cdot 11$
$+\cdots+(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)$

(用 n 的式子表示)

參考解答：

所求

$$=\frac{1}{-10}[(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9]$$

$$+\frac{1}{-10}[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9-3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11]$$

$$+\cdots+\frac{1}{-10}[(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)$$

$$-(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)]$$

$$=\frac{1}{-10}[-105-(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)]$$

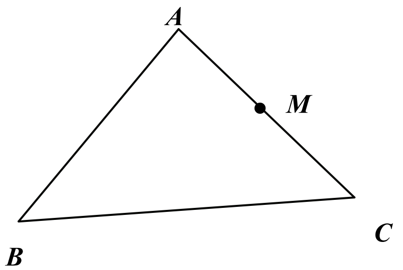
$$=\frac{1}{5}(16n^5+40n^4-40n^3-100n^2+9n+75)$$

解題評註：

$\sum$ 的運算性質屬於高中課程，使用它來解國中通訊徵答的題目是比不上分項對消法來的漂亮！

問題編號
5105

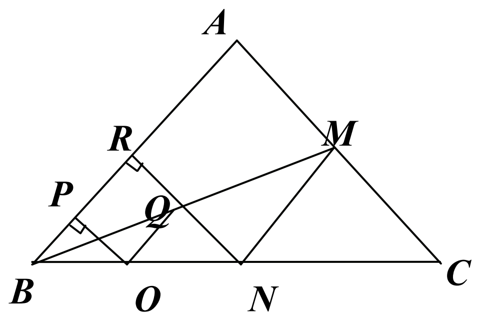
已知三角形 ABC 及 AC 邊上一點 M，試求 BC 邊上一點 N，使 N 點到 AB 邊和到 M 點的距離相等。



參考解答：

一、作法：

1. 作射線 $\overrightarrow{BM}$。
2. 在線段 AB 上任取一點 P。並自 P 點作線段 AB 的垂線交 BC 邊上於 O 點。
3. 以 O 點爲圓心，OP 線段長爲半徑，交線段 BM 於 Q 點(交點可能有兩個取一個即可)。
4. 連接 $\overline{OQ}$。
5. 過 M 作 $\overline{MN}$ 使 $\overline{MN} // \overline{OQ}$，並交 BC 邊上於 N，即爲所求



二、證明：

1. 自 N 點作線段 AB 的垂線 NR 交 AB 邊上於 R 點。
2. 由相似三角形可得，$\dfrac{\overline{MN}}{\overline{OQ}}=\dfrac{\overline{BN}}{\overline{BO}}=\dfrac{\overline{NR}}{\overline{OP}}$。
3. 因爲 $\overline{OQ}=\overline{OP}$，所以 $\overline{MN}=\overline{NR}$，及得證 BC 邊上一點 N，到 AB 邊和到 M 點的距離相等。

解答重點：

這是一個幾何的思考問題，題目需用到幾何的比例概念來作圖，詳細的作法與證明如上述。